Oplossing oefening 3.4.

Opgave

Zoek alle symmetriën van de vorm

$$\left.\begin{aligned} q' &= q + \epsilon\xi(t,q) \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{q}'^i = \dot{q}^i + \epsilon\dot{\xi}^i(t,q,\dot{q})\,, \tag{1}$$

voor de harmonische oscillator lagrangiaan:

$$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{q}^2 - kq^2\right)\,. \tag{2}$$

Merk op dat we hier de tijdstransformaties buiten beschouwing laten; die zouden nog 3 extra symmetrieën opleveren waaronder de symmetrie uit oef. 3.1.

Oplossing

De transformatie (1) is slechts een symmetrie als en slechts er een functie $f(q,t)$ bestaat zodanig dat:

$$\xi\frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{f}\,, \qquad \forall q, \dot{q}, t\,. \tag{3}$$

We werken deze vergelijking uit:

$$-qk\xi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial \xi}{\partial q}\right)m\dot{q} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} \tag{4}$$

Dit kan maar gelden voor alle $\dot{q}$, als de coëfficiënten van $\dot{q}^0$, $\dot{q}^1$, $\dot{q}^2$ nul worden:

$$-kq\xi = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{5a}$$

$$m\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q} \tag{5b}$$

$$m\frac{\partial \xi}{\partial q} = 0\,. \tag{5c}$$

Uit vergelijking (5c) volgt dat ξ enkel functie is van t: $\xi = \xi_0(t)$. Vergelijkingen (5a) en (5b) geven aanleiding tot een *integrabiliteitsvoorwaarde*: vermits onder ruime voorwaarden partiële afgeleiden commuteren:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\,, \tag{6}$$

volgt met (5a) en (5b) en $\xi = \xi_0(t)$:

$$m\ddot{\xi}_0 + k\xi_0 = 0\,. \tag{7}$$

De oplossing hiervan luidt:

$$\xi_0(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\,, \tag{8}$$

met $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Komen we terug op voorwaarde (5b) — herschreven:

$$\frac{\partial f}{\partial q} = m\dot{\xi}_0\,, \tag{9}$$

en integreren we die, dan vinden we:

$$f(q,t) = m\dot{\xi}_0 q + a(t)\,, \tag{10}$$

met $a(t)$ een willekeurige functie. Vullen we dit in in voorwaarde (5a) in:

$$m\ddot{\xi}_0 q + \dot{a} = -kq\xi_0\,, \tag{11}$$

dan zien we dat $\dot{a} = 0$ en dat we onze integrabiliteitsvoorwaarde terugvinden, vermits zowel de coëfficiënt van q^0 als q^1 moet nul zijn.

Samenvattend vinden we voor de algemene symmetrietransformatie (met twee constanten, zodat er in feite 2 lineaire onafhankelijke symmetrietransformaties zijn) en de behouden grootheid;

$$\begin{aligned} \xi(q,t) &= c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t \\ F(q,t) &= c_1(m\dot{q}\cos\omega t + mq\omega\sin\omega t) + c_2(m\dot{q}\sin\omega t - mq\omega\cos\omega t) + c\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Ter controle: richten we onze aandacht op de eerste transformatie ($c_1 = 0, c_2 = 0$):

$$q' = q + \epsilon\cos\omega t\,, \tag{13}$$

en vervangen we in de Euler-Lagrange vergelijking $m\ddot{q} + kq = 0$ de q door q':

$$m(\ddot{q} - \epsilon\omega^2\cos\omega t) + k(q + \epsilon\cos\omega t) = m\ddot{q} + kq\,, \tag{14}$$

dan vinden we inderdaad de oorspronkelijk Euler-Lagrange vergelijking terug (symmetrie). Ook geldt dat, gebruik makende van de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\dot{F} = m\ddot{q}\cos\omega t - m\dot{q}\omega\sin\omega t + m\dot{q}\omega\sin\omega t + mq\omega^2\cos\omega t = 0\,, \tag{15}$$

zodat F inderdaad een behouden grootheid is.

Oplossing oefening 7.3

Opgave

Kepler-probleem: $L = \frac{m\dot{\bar{r}}^2}{2} + \frac{k}{r}$. Ga over naar het Hamilton-formalisme. Beschouw de Laplace-Runge-Lenz vector:

$$\bar{A} = \bar{p} \times \bar{L} - \frac{mk}{r}\bar{r}\,. \tag{16}$$

Bereken $\{L_i, H\}$ en $\{L_i, f(r)\}$. Gebruik dit om $\{A_i, H\}$ uit te rekenen.

Oplossing

Het momentum toegevoegd aan $\bar{r} = (x, y, z)$ is $\bar{p} = (p_x, p_y, p_z)$ met

$$\bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}} = m\dot{\bar{r}}\,. \tag{17}$$

De hamiltoniaan wordt dan:

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}\,. \tag{18}$$

We berekenen eerst:

$$\begin{aligned} \{L_i, f(r)\} &= \epsilon_{ijk} r^j \{p_k, f(r)\} = -\epsilon_{ijl} r^j \frac{df}{dr}\frac{r^l}{r} = 0 \\ \{L_i, H\} = \{L_i, \frac{\bar{p}^2}{2m}\} &= \epsilon_{ijk} p_k \{r^j, \frac{\bar{p}^2}{2m}\} = \epsilon_{ilk} p_k \frac{p_l}{m} = 0\,, \end{aligned} \tag{19}$$

waarbij in de tweede lijn al gebruikt werd gemaakt van het resultaat van de eerste lijn en waarbij de laatste uitdrukkingen op elke lijn nul worden omdat een antisymmetrische tensor (ϵ) wordt gecontraheerd met een symmetrische uitdrukking. Ook werd gebruik gemaakt van:

$$\frac{\partial r}{\partial r^i} = \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial r^i} = \frac{r^i}{r}\,. \tag{20}$$

Met deze ingrediënten kunnen we uiteindelijk het Poisson-haakje van de Laplace-Runge-Lenze vector met de hamiltoniaan aanpakken:

$$\begin{aligned} \{\bar{A}, H\} &= \{\bar{p} \times \bar{L} - mk\frac{\bar{r}}{r}, H\} \\ &= \{\bar{p}, H\} \times \bar{L} - mk\{\frac{\bar{r}}{r}, H\} \\ &= \{\bar{p}, -\frac{k}{r}\} - mk\left(-\frac{\bar{r}}{r^2}\frac{r^l}{r}\frac{p_l}{m} + \frac{\bar{1}_l}{r}\frac{p_l}{m}\right) \\ &= -\bar{1}_l \frac{k}{r^2}\frac{r^l}{r} - \frac{k}{r^3}(-\bar{r}(\bar{r}\dot{\bar{p}}) + r^2\bar{p}) \\ &= -\frac{k}{r^3}\left(\bar{r} \times (\bar{r} \times \bar{p}) - \bar{r}(\bar{r}\dot{\bar{p}}) + r^2\bar{p}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

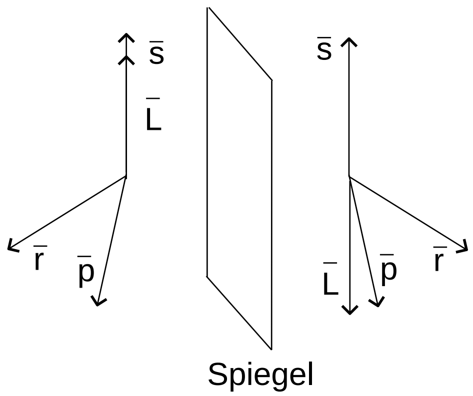
Bijgevolg geldt

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \{\bar{A}, H\} = 0\,, \tag{22}$$

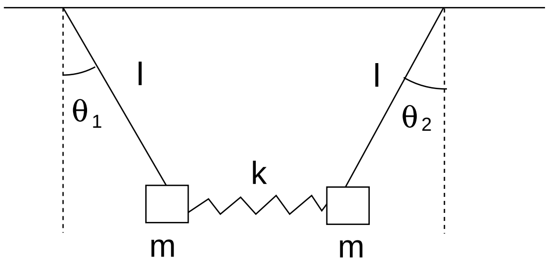
zodat de Laplace-Runge-Lenze vector een constante van de beweging is. Dit laatste kan ook aangetoond worden door $\frac{d\bar{A}}{dt}$ rechtstreeks uit te rekenen en gebruik te maken van de bewegingsvergelijkingen.

$\bar{L}$ is een pseudovector

In de figuur zijn $\bar{r}$, $\bar{p}$ en $\bar{s}$ gewone vectoren. $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$ is echter een pseudovector, want zij bevat de ϵ-tensor. Onder spiegeling (oneigenlijke rotatie, dus met determinant -1) transformeert $\bar{L}$ met een extra minteken tegenover de gewone vector $\bar{s}$. Oneigenlijke rotaties (dus ook deze spiegeling) worden bekomen door de samenstelling van een puntsymmetrie en een (eigenlijke) rotatie.



Oplossing oefening 9.2



We nemen de hoeken $q^i = (\theta_1, \theta_2)$ als veralgemeende coördinaten. Beide worden in tegenwijzerzin gemeten. In functie daarvan worden de coördinaten van de twee massa's:

$$x_1 = l \sin\theta_1, \qquad y_1 = -l\cos\theta_1, \qquad x_2 = l_0 + l\sin\theta_2, \qquad y_2 = -l\cos\theta_2 \,. \tag{23}$$

De lengte van de veer wordt:

$$\Delta l = \sqrt{(l\sin\theta_2 - l\sin\theta_1 + l_0)^2 + (l\cos\theta_2 - l\cos\theta_1)^2} \,. \tag{24}$$

Deze geeft aanleiding tot de potentiële energie:

$$V_{\text{veer}} = \frac{1}{2} k (\Delta l - l_0)^2 \,, \tag{25}$$

waarbij l_0 de rustlengte van de veer is en tevens de afstand tussen de twee bevestigingspunten. In de opgave staat dat we de verticale bijdrage tot de lengte van de veer — de term met de cosinussen — mogen verwaarlozen. Je ziet dat die toch van tweede orde is in θ_1 en θ_2 en dus geen rol zal spelen in onze kleine-trilling benadering.

De lagrangiaan wordt dan:

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) - \frac{kl^2}{2}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \,. \tag{26}$$

Het evenwicht wordt gevonden uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} &= -kl^2\left((\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\cos\theta_1\right) - mgl\sin\theta_1 = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} &= -kl^2\left(-(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\cos\theta_2\right) - mgl\sin\theta_2 = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Deze vergelijkingen zien er vrij ingewikkeld uit en als de afstand tussen de twee bevestigingspunten niet meer l_0 is dan zullen we ze effectief moeten oplossen. Als beide massa's of lengtes van de slingers niet meer gelijk zijn dan wordt het nog ingewikkelder. In dit geval zien we echter dat $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ een minimum is van de potentiaal, want het minimaliseert zowel de potentiële energie van de veer als van de zwaartekracht.

We maken nu een Taylor expansie van de lagrangiaan $L = T - V$ rond dit evenwichtspunt:

$$L = L_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right|_0 \Delta \dot{q}^i \Delta \dot{q}^j - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right|_0 \Delta q^i \Delta q^j \tag{28}$$

De constante bijdrage L_0 beschouwen we niet, want ze heeft geen invloed op de bewegingsvergelijkingen. Een term $- \left. \frac{\partial V}{\partial q^i} \right|_0 \Delta q^i$ schrijven we niet, want deze term is nul als we rond een evenwicht werken wegens vergelijkingen zoals (27). In principe zijn er nog termen mogelijk:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial q^i} \right|_0 \Delta q^i + \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right|_0 \Delta \dot{q}^i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial q^i \partial q^j} \right|_0 \Delta q^i \Delta q^j + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \right|_0 \Delta q^i \Delta \dot{q}^j + \left. \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} \right|_0 + \cdots \, . \tag{29}$$

Onder volgende voorwaarden zijn deze termen echter nul:

- De lagragiaan is een typische mechanica-lagrangiaan $L = T - V$. Zowel de kinetische als de potentiële energie zijn niet *expliciet* afhankelijk van de tijd: $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Afhankelijkheid van de tijd via de coördinaten of hun afgeleiden mag natuurlijk wel.

- De holonome verbindingen zijn onafhankelijk van de tijd. Ze zijn enkel functie van de coördinaten en niet van hun afgeleiden.

- De gekozen evenwichtstoestand moet bijgevolg ook onafhankelijk zijn van de tijd.

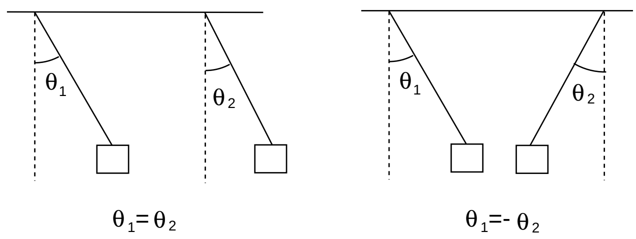
Voor de matrices $V = \left[\left. \frac{V}{\partial q^i \partial q^j} \right|_0 \right]$ en $T = \left[\left. \frac{T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right|_0 \right]$ vinden we:

$$V = \begin{bmatrix} kl^2 + mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & kl^2 + mgl \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} . \tag{30}$$

We stellen een oplossing voor van de vorm $q^i = a^i e^{-i\omega t}$, waarbij de vector a moet voldoen aan $[V - \omega^2 T]\,[a] = 0$. De eigenwaarden en eigenvectoren (op een constante na bepaald) worden:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{l} \Rightarrow a_1 = (1,1) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \Rightarrow a_2 = (1,-1) \Rightarrow \theta_1 = -\theta_2 \, . \end{aligned} \tag{31}$$

Deze twee modes zijn er als volgt uit:



De meest algemene oplossing is:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{g}{m}} t + \phi_1) + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{\frac{g}{m} + \frac{2k}{m}} t + \phi_2)\,. \tag{32}$$

Merk op dat de eerste term overeenkomt met een excitatie van het systeem waarbij beide slingers in fase bewegen en bij de tweede term bewegen ze in tegenfase. Wanneer de slingers in fase bewegen gedragen ze zich als twee aparte slingers (vandaar $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$) en wanneer de slingers in tegenfase bewegen wordt de beweging versneld door de werking van de veer (vandaar $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$).

Bij de start geven we de eerste slinger een uitwijking θ_0, terwijl de twee slinger verticaal hangt. Dit komt overeen met de beginvoorwaarden:

$$\theta_1 = \theta_0\,, \qquad \theta_2 = \dot{\theta_1} = \dot{\theta_2} = 0\,. \tag{33}$$

We vinden dan:

$$c_1 = 0\,, \qquad c_2 = \frac{\theta_0}{2}\,, \tag{34}$$

en als (particuliere) oplossing — na het toepassen van de formules van Simpson:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 \cos(\frac{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{g}{l}}}{2} t) \cos(\frac{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} - \sqrt{\frac{g}{l}}}{2} t) \\ \theta_2 &= \theta_0 \sin(\frac{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{g}{l}}}{2} t) \sin(\frac{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} - \sqrt{\frac{g}{l}}}{2} t) \end{aligned} \tag{35}$$

Voeren we nu wrijving in:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}\,, \tag{36}$$

dan wordt de eigenwaarde-vergelijking nu $[V - i\omega\mathcal{F} - \omega^2 T]\,[a] = 0$. De eigenwaarden zijn:

$$\begin{aligned} \omega_{1,\pm} &= \frac{-if \pm \sqrt{-f^2 + 4\frac{m^2 g}{l}}}{2m} \\ \omega_{2,\pm} &= \frac{-if \pm \sqrt{-f^2 + 4m(2k + \frac{mg}{l})}}{2m} \end{aligned} \tag{37}$$

terwijl de eigenvectoren dezelfde blijven.

In de veronderstelling dat zowel $-f^2 + 4\frac{m^2 g}{l} > 0$ als $-f^2 + 4m(2k + \frac{mg}{l}) > 0$ krijgen we de som van twee gedempte oscillaties als oplossing:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} =& c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\frac{f}{2m}} \cos\left(\frac{\sqrt{-f^2 + 4\frac{m^2 g}{l}}}{2m} t + \phi_1 \right) \\ &+ c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-\frac{f}{2m}} \cos\left(\frac{\sqrt{-f^2 + 4m(2k + \frac{mg}{l})}}{2m} t + \phi_2 \right) . \end{aligned} \tag{38}$$