1 De Hamilton vergelijkingen

Gegeven een systeem met m vrijheidsgraden, geparametriseerd door m veralgemeende coördinaten q_i, $i \in \{1, \cdots, m\}$, met lagrangiaan $L(q, \dot{q}, t)$. Nemen we de totale differentiaal van L dan krijgen we

$$\begin{aligned} dL(q,\dot{q},t) &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} dq_i + p^i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} dt, \end{aligned} \tag{1.1}$$

waar we het veralgemeend moment p^i toegevoegd aan q_i invoerden:

$$p^i \equiv \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1.2}$$

Gebruik makend van de Euler-Lagrange vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} p^i, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kunnen we vgl. (1.1) nog herschrijven

$$\begin{aligned} dL(q,\dot{q},t) &= \sum_{i=1}^{m} \left(\dot{p}^i dq_i + p^i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\dot{p}^i dq_i + p^i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp^i - \dot{q}_i dp^i \right) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{m} d\left(p^i \dot{q}_i \right) + \sum_{i=1}^{m} \left(\dot{p}^i dq_i - \dot{q}_i dp^i \right) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} dt. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Definiëren we de hamiltoniaan $H(q, p, t)$ door

$$H(q,p,t) \equiv \sum_{i=1}^{m} p^i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t), \tag{1.5}$$

dan volgt uit vgl. (1.4) dat de totale differentiaal van de hamiltoniaan gegeven wordt door:

$$dH(q,p,t) = \sum_{i=1}^{m} \left(\dot{q}_i dp^i - \dot{p}^i dq_i \right) - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} dt. \tag{1.6}$$

Uit vgl. (1.6) volgt dus dat de hamiltoniaan $H(q, p, t)$ een expliciete functie is van q_i, p^i en t voor $i \in \{1, \cdots, m\}$ en niet meer van de veralgemeende snelheden. De afhankelijkheid van de veralgemeende snelheden van de lagrangiaan is dus ingeruild voor de afhankelijkheid van de veralgemeende momenta van de hamiltoniaan. Uit vgl. (1.6) volgen dan de Hamilton vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p^i}, \\ \dot{p}^i &= -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i},\end{aligned} \tag{1.7}$$

en

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t}. \tag{1.8}$$

De eerste vergelijking in (1.7) drukt p^i uit als een functie van q_i en $\dot{q}_i$, terwijl de tweede vergelijking dan equivalent wordt met de bewegingsvergelijking.

In het Lagrange formalisme introduceerden we de configuratieruimte. In het Hamilton formalisme introduceren we de *faseruimte*. Dit is een $2m$-dimensionale ruimte met als coördinaten q_i en p^j, $i, j \in \{1, \cdots, m\}$. De evolutie van ons mechanisch syteem kan voorgesteld worden als een kromme in de faseruimte. Die kromme is volledig bepaald door de Hamilton vergelijkingen en $2m$ beginvoorwaarden.

Gegeven twee functies op de faseruimte $f(q,p,t)$ en $g(q,p,t)$, het Poisson haakje van f en g, $\{f,q\}$, is gedefinieerd door

$$\{f,q\} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right), \tag{1.9}$$

en we hebben o.a.

$$\begin{aligned}&\{q_i, q_j\} = \{p^i, p^j\} = 0, \\ &\{q_i, p^j\} = \delta_i^j.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Uit de definitie volgt onmiddellijk dat het Poisson haakje antisymmetrisch is:

$$\{f,g\} = -\{g,f\}. \tag{1.11}$$

Verder voldoet het Poisson haakje ook aan de Jacobi identiteit:

$$\{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}, \tag{1.12}$$

met $f(q,p,t)$, $g(q,p,t)$ en $h(q,p,t)$, drie functies op de faseruimte. Een equivalente vorm van de Jacobi identeit is

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0, \tag{1.13}$$

waar we van de antisymmetrie van het haakje gebruik maakten om deze uitdrukking uit vgl. (1.12) te bekomen. Vgl. (1.12) wordt bewezen via directe berekening. Enkele andere eigenschappen van het haakje van Poisson zijn:

$$\{f, g+h\} = \{f, g\} + \{f, h\}, \tag{1.14}$$

en

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \tag{1.15}$$

Beide eigenschappen worden opnieuw door directe berekening bewezen.

Gebruik makend van het haakje van Poisson, kunnen we de Hamilton vergelijkingen nog beknopt als

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\}, \\ \dot{p}^i &= \{p^i, H\}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

herschrijven.

2 Constantes van de beweging

Beschouw een functie $f(q, p, t)$ op de faseruimte. Dan volgt uit de definitie van de Poisson haakjes en de Hamilton vergelijkingen dat

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \tag{2.1}$$

Beschouwen we het specifiek geval waar $f = H$ dan volgt uit vgl. (2.1) dat

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Dit resultaat werd reeds vroeger afgeleid: *de hamiltoniaan (toen energiefunctie genoemd) is een constante van de beweging indien ze niet expliciet van de tijd afhangt.* In het bijzonder krijgen we ook dat indien f geen expliciete functie is van de tijd dat

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \tag{2.3}$$

Dit impliceert dus dat het Poisson haakje van constantes van de beweging die niet expliciet van de tijd afhangen met de hamiltoniaan, nul is. Dus kunnen we de constantes van de beweging die niet expliciet van de tijd afhangen definiëren als de functies op de faseruimte

$f(q,p)$ die een Poisson haakje met de hamiltoniaan hebben die nul is. Belangrijk bij de studie van de constantes van de beweging is de stelling van Poisson:

<u>Stelling</u>: *Zij $f(q,p,t)$ en $g(q,p,t)$ twee constantes van de beweging, dan is $\{f,g\}$ ook een constante van de beweging.*

Deze stelling volgt onmiddellijk uit het volgend lemma:

<u>Lemma</u>: *Gegeven twee functies op de faseruimte $f(q,p,t)$ en $g(q,p,t)$, dan geldt:*

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\}. \tag{2.4}$$

<u>Bewijs</u>: Uit vgl. (2.1) volgt dat

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} + \{\{f,g\},H\}. \tag{2.5}$$

Uit het feit dat partiële afgeleiden commuteren volgt dat

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}. \tag{2.6}$$

Uit antisymmetrie van het haakje en de Jacobi identiteit volgt dat

$$\begin{aligned} \{\{f,g\},H\} &= -\{H,\{f,g\}\} = -\{\{H,f\},g\} - \{f,\{H,g\}\} \\ &= \{\{f,H\},g\} + \{f,\{g,H\}\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Maken we gebruik van vgl. (1.14), (2.6) en (2.7) in (2.5), dan volgt het lemma.

Als voorbeeld beschouwen we een deeltje dat in drie dimensies in een sferisch symmetrische potentiaal beweegt. We weten dat het angulair moment $\vec{L}$ behouden is. Een eenvoudige berekening levert

$$\{L_x, L_y\} = L_z, \qquad \{L_y, L_z\} = L_x, \qquad \{L_z, L_x\} = L_y. \tag{2.8}$$

We voeren de notatie $L_1 \equiv L_x$, $L_2 \equiv L_y$, $L_3 \equiv L_z$ in. De voorgaande vergelijking kan dan ook herschreven worden als

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k, \tag{2.9}$$

met het antisymmetrisch symbool ε_{ijk}, $i,j,k \in \{1,2,3\}$, dat antisymmetrisch is onder een oneven aantal permutaties van haar indices, symmetrisch onder een even aantal permutaties en $\varepsilon_{123} = 1$. Indien de sferische potentiaal van het Kepler type is, m.a.w. $V(r) = -k/r$, dan hebben we naast de energie en het angulair moment, ook de Runge-Lenz vector $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\,\vec{r}/r$ als constante van de beweging. Een directe berekening levert:

$$\begin{aligned} \{L_i, A_j\} &= -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_k \\ \{A_i, A_j\} &= -2mE \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k \\ \{E, L_i\} &= \{E, A_i\} = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

De laatste vergelijking is natuurlijk een direct gevolg van het feit dat $\vec{L}$ en $\vec{A}$ constantes van de beweging zijn.

Uiteindelijk bespreken we de relatie tussen constantes van de beweging en symmetrieën. Beschouw een functie $f(q,p)$ die niet expliciet van de tijd afhangt en behouden is:

$$0 = \frac{df}{dt} = \{f, H\} = -\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \{q_i, f\} + \frac{\partial H}{\partial p^i} \{p^i, f\} \right). \tag{2.11}$$

Hieruit leiden we af dat de hamiltoniaan invariant is onder de infinitesimale transformaties

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow q'_i = q_i + \varepsilon \{q_i, f\}, \\ p^i &\rightarrow p'^i = p^i + \varepsilon \{p^i, f\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

met ε een infinitesimale constante. M.a.w. we hebben dat $H(q,p,t) = H(q',p',t)$. In het Lagrange formalisme hebben we gezien hoe we door het beschouwen van infinitesimale symmetrieën , constantes van de beweging kunnen afleiden. Hier in het Hamilton formalisme bekomen we het omgekeerd resultaat: uit constantes van de beweging leiden we moeiteloos de bijhorende symmetrieën af. Als oefening kan de lezer nu de symmetrieën van het Kepler probleem bestuderen. Een en ander zal nog duidelijker worden in het volgend hoofdstuk.

3 Canonische transformaties

In het Lagrange formalisme zagen we dat de fysica niet verandert onder een coördinatentransformatie in de configuratieruimte (punttransformatie). We willen nu iets analoogs bespreken in het Hamilton formalisme.

Beschouw een mechanisch systeem met hamiltoniaan $H(q, p, t)$ en een coördinatentransformatie in de fase ruimte:

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow q'_i(q, p, t) \\ p^i &\rightarrow p'^i(q, p, t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nu zijn we niet in om het even welke coördinatentransformatie geïnteresseerd, maar enkel in deze waarvoor een functie $H'(q', p', t)$ bestaat zodat

$$\begin{aligned} \dot{q}'_i &= \frac{\partial H'}{\partial p'^i}, \\ \dot{p}'_i &= -\frac{\partial H'}{\partial q'^i}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

geldt. M.a.w. er bestaat nog steeds een hamiltoniaan voor de nieuwe coördinaten. Indien vgl. (3.1) en (3.2) voor een welbepaalde hamiltoniaan H gelden, dan noemen we de transformatie (3.1) canonoïde. Indien ze voor arbitraire hamiltonianen H gelden, dan noemen de transformatie een canonische transformatie. Wegens het universeel karakter van canonische transformaties zullen we enkel deze transformaties bestuderen.

Voor we deze studie aanvangen, zullen we eerst de vergelijkingen van Hamilton afleiden uit een integraal principe. We vertrekken van het integraal principe van Hamilton, $\delta\mathcal{S} = 0$, met $\mathcal{S}$ gegeven door

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i p^i - H(q, p, t) \right) \\ &= \int \sum_{i=1}^{m} dq_i p^i - \int_{t_1}^{t_2} dt H(q, p, t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Voor onafhankelijke variaties van de faseruimte coördinaten krijgen we voor de variatie van de actie:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \sum_{i=1}^{m} \left(\int d\delta q_i p^i + dq_i \delta p^i - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p^i} \delta p^i \right) \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{m} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left(\frac{\partial H}{\partial p^i} - \dot{q}_i \right) \delta p^i + \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}^i \right) \delta q_i \right) + \sum_{i=1}^{m} \delta q_i p^i \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dus indien de begin- en eindpunten van de variaties vast gehouden worden, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, dan volgt uit (3.4) dat $\delta\mathcal{S} = 0$ equivalent is met de Hamilton vergelijkingen (1.7).

Keren we nu terug naar onze studie van canonische transformaties. Indien een transformatie canonisch is, dan moet er een actie $\mathcal{S}' = \int \sum_{i=1}^m dq'_i p'^i - \int_{t_1}^{t_2} dt H'$ bestaan, zodat $\delta \mathcal{S}' = 0$ de Hamilton vergelijkingen (3.2) opleveren. Dit is het geval indien het integrandum van $\mathcal{S}$ van die van $\mathcal{S}'$ verschilt met een totale differentiaal van een functie. In dat geval is $\mathcal{S}' - \mathcal{S}$ een constante die geen rol speelt bij het variëren. We krijgen dus:

$$\sum_{i=1}^m dq_i p^i - dtH = \sum_{i=1}^m dq'_i p'^i - dtH' + dF_1, \tag{3.5}$$

waar F_1 de genererende of voortbrengende functie van de canonische transformatie genoemd wordt. Vgl. (3.5) kan herschreven worden als

$$dF_1 = \sum_{i=1}^m \left(p^i dq_i - p'^i dq'_i \right) + (H' - H)dt, \tag{3.6}$$

waaruit dan volgt dat

$$p^i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad p'^i = -\frac{\partial F_1}{\partial q'_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{3.7}$$

In dit geval hebben we dus dat $F_1 \equiv F_1(q, q', t)$. Uit de eerste vergelijking in (3.7) volgt, na inversie, $q'_i(q, p, t)$, waarna uit de tweede vergelijking $p'^i(q, p, t)$ volgt.

We kunnen nu d.m.v. Legendre transformaties ook nog voortbrengende functies van het type $F_2 \equiv F_2(q, p', t)$, $F_3 \equiv F_3(p, q', t)$ en $F_4 \equiv F_4(p, p', t)$ bekomen en vergelijkingen van het type (3.7) afleiden.

We beschouwen F_2 gedefinieerd via de Legendre transformatie:

$$F_2(q, p', t) = F_1(q, q', t) + \sum_{i=1}^m p'^i q'_i. \tag{3.8}$$

Inderdaad:

$$dF_2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial q'_i} dq'_i + p'^i dq'_i + q'_i dp'^i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt. \tag{3.9}$$

M.b.v. vgl. (3.7) wordt dit

$$dF_2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + q'_i dp'^i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt, \tag{3.10}$$

en F_2 hangt idd. enkel van q_i, p'^i en t af. Uit vgl. (3.10) volgt dan

$$p^i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'^i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \tag{3.11}$$

Op analoge wijze berekenen we de totale afgeleide van F_3,

$$F_3(p, q', t) = F_1(q, q', t) - \sum_{i=1}^{m} p^i q_i, \tag{3.12}$$

waaruit dan

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p^i}, \qquad p'^i = -\frac{\partial F_3}{\partial q'_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}, \tag{3.13}$$

volgt.

Uiteindelijk hebben we F_4:

$$F_4(p, p', t) = F_1(q, q', t) + \sum_{i=1}^{m} p'^i q'_i - \sum_{i=1}^{m} p^i q_i, \tag{3.14}$$

en na berekening van dF_4 volgt

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \qquad q'_i = \frac{\partial F_4}{\partial p'^i}, \qquad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \tag{3.15}$$

We geven nu enkele voorbeelden van canonische transformaties.

1. Nemen we $F_1 = \sum_{i=1}^m q_i q'_i$, dan volgt uit (3.7) dat

$$q'_i = p^i, \qquad p'^i = -q_i. \tag{3.16}$$

   Dit is dus een transformatie die coördinaten en momenta omwisselt.

2. Nemen we $F_2 = \sum_{i=1}^m p'^i f_i(q, t)$, dan volgt uit (3.11) o.a. dat

$$q'_i = f_i(q, t), \tag{3.17}$$

   m.a.w. alle punttransformaties zijn canonisch.

3. Nemen we $F_2 = \sum_{i=1}^m q_i p'^i$, dan volgt uit (3.11) dat

$$q'_i = q_i \qquad p'^i = p^i. \tag{3.18}$$

   Dit is dus de identiteitstransformatie.

4. Uiteindelijk beschouwen we infinitesimale canonische transformaties

$$q'_i = q_i + \delta q_i, \qquad p'^i = p^i + \delta p^i, \tag{3.19}$$

met δq_i en δp^i infinitesimaal. De voortbrengende functie zal met een infinitesimale functie van de voortbrengende functie van de identiteitstransformatie verschillen:

$$F_2 = \sum_{i=1}^{m} q_i p'^i + \varepsilon\, f(q,p'), \tag{3.20}$$

waar ε een constante infinitesimaal is. We vinden m.b.v. (3.11) en (3.19):

$$\begin{aligned} \delta q_i &= \varepsilon\,\frac{\partial f(q,p')}{\partial p'^i} \approx \varepsilon\,\frac{\partial f(q,p)}{\partial p^i} = \varepsilon\,\{q_i, f(q,p)\}, \\ \delta p^i &= -\varepsilon\,\frac{\partial f(q,p')}{\partial q_i} \approx -\varepsilon\,\frac{\partial f(q,p)}{\partial q_i} = \varepsilon\,\{p^i, f(q,p)\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Deze uitdrukkingen zijn exact t.e.m. eerste orde in de infinitesimalen.

Indien we een voortbrengende functie F hebben die niet expliciet tijdsafhankelijk is dan geldt dat

$$H'(q',p',t) = H(q,p,t). \tag{3.22}$$

Dit is een punt dat aanleiding tot verwarring kan geven. Men zou geneigd zijn om uit de voorgaande uitdrukking te besluiten dat elke canonische symmetrie die uit zo een voortbrengende functie volgt, aanleiding geeft tot een symmetrie. Vgl. (3.22) is echter *niet* de voorwaarde voor een symmetrie, een symmetrie voldoet immers aan:

$$H(q',p',t) = H(q,p,t), \tag{3.23}$$

Of ook nog uit (3.22) en (3.23):

$$H'(q',p',t) = H(q',p',t). \tag{3.24}$$

Voor een canonische transformatie krijgen we dus dat (3.22) zegt hoe we de hamiltoniaan in de nieuwe coördinaten krijgen en die zal er over het algemeen totaal anders uitzien in vergelijking met de oorspronkelijke. Niettemin zullen beide Hamiltonianen dezelfde fysica beschrijven. Indien de canonische transformatie nu ook nog een symmetrie is, m.a.w. (3.23) of (3.24) gelden, dan is de hamiltoniaan vorminvariant, m.a.w. de nieuwe hamiltoniaan is vormequivalent met de oude.

Om één en ander duidelijk te maken beschouwen we een voorbeeld: een deeltje met massa m dat in het xy-vlak beweegt onder invloed van een centrale potentiaal. De hamiltoniaan is dus:

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + V(\sqrt{x^2+y^2}). \tag{3.25}$$

We beschouwen nu twee canonische transformaties, de eerste met voortbrengende functie

$$F_3 = -r\cos\theta\, p_x - r\sin\theta\, p_y, \tag{3.26}$$

waaruit met (3.13) volgt dat

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \tag{3.27}$$

en

$$p_\theta = -r\sin\theta\, p_x + r\cos\theta\, p_y, \qquad p_r = \cos\theta\, p_x + \sin\,\theta p_y, \tag{3.28}$$

met

$$H'(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta}{r^2}\right) + V(r). \tag{3.29}$$

Dit is dus de transformatie naar poolcoördinaten. En hoewel de nieuwe hamiltoniaan precies dezelfde fysica beschrijft als de oude, is het duidelijk dat de hamiltoniaan niet (vorm)invariant is onder deze transformatie. We beschouwen nu een tweede canonische transformatie met voortbrengende functie

$$F_2 = (x\cos\varphi - y\sin\varphi)p'_x + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)p'_y. \tag{3.30}$$

Gebruik makend van (3.11) vindt men

$$\begin{aligned} p_x &= \cos\varphi\, p'_x + \sin\varphi\, p'_y, \qquad p_y = -\sin\varphi\, p'_x + \cos\varphi\, p'_y, \\ x' &= \cos\varphi\, x - \sin\varphi\, y, \qquad y' = \sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y, \end{aligned} \tag{3.31}$$

en de hamiltoniaan is

$$H'(x',y',p'_x,p'_y) = \frac{1}{2m}\left(p'^2_x + p'^{\,2}_y\right) + V(\sqrt{x'^2 + y'^2}) = H(x',y',p'_x,p'_y). \tag{3.32}$$

Deze transformatie laat dus de hamiltoniaan wel degelijk vorminvariant en beschrijft dus een symmetrie, rotaties omheen de z-as in dit geval, van ons systeem.

Hebben we een canonische transformatie met een voortbrengende functie die niet expliciet van de tijd afhangt en die de hamiltoniaan vorminvariant laat $H'(q',p',t) = H(q',p',t)$, dan volgt uit $H'(q',p',t) = H(q,p,t)$ dat deze canonische transformatie tevens een symmetrie is van ons mechanisch systeem is $H(q',p',t) = H(q,p,t)$. Voor een infinitesimale transformatie (3.21), vinden we dan

$$\begin{aligned} \delta H(q,p,t) &= H(q',p',t) - H(q,p,t) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial H(q,p,t)}{q_i}\delta q_i + \frac{\partial H(q,p,t)}{p^i}\delta p^i\right) \\ &= \varepsilon\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial H}{q_i}\frac{\partial f}{\partial p^i} - \frac{\partial H}{p^i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) \\ &= -\varepsilon\{f,H\}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

waaruit volgt dat $f(q, p)$ een constante van de beweging is, volledig in overeenstemming met de resultaten van het vorig hoofdstuk.

Uiteindelijk sluiten we ons hoofdstuk af met een veel gebruikte stelling.

Stelling: Een nodige en voldoende voorwaarde opdat een transformatie (3.1) canonisch zou zijn is dat[1]

$$\begin{aligned} \{q'_i, q'_j\}_{q,p} &= \{p'^i, p'^j\}_{q,p} = 0, \\ \{q'_i, p'^j\}_{q,p} &= \delta_i^j, \end{aligned} \tag{3.34}$$

waar de subindex bij het Poisson haakje aanduidt t.o.v. welke coördinaten we het haakje berekenen.

Bewijs: We tonen eerst aan dat de voorwaarde voldoende is. We stellen dus dat (3.34) geldt en tonen aan dat daaruit volgt dat er een H' bestaat zodat (3.2) geldt. We krijgen dat

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial q'_i}{\partial t} + \{q'_i, H\}_{q,p}, \qquad \dot{p}'^i = \frac{\partial p'^i}{\partial t} + \{p'^i, H\}_{q,p}, \tag{3.35}$$

waar is. Door directe berekening vinden we dat

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial q'_i} \frac{\partial g}{\partial q'_j} \{q'_i, q'_j\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial p'^i} \frac{\partial g}{\partial p'^j} \{p'^i, p'^j\}_{q,p} + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial f}{\partial q'_i} \frac{\partial g}{\partial p'^j} - \frac{\partial f}{\partial p'^i} \frac{\partial g}{\partial q'_j} \right) \{q'_i, p'^j\}_{q,p} \right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Indien (3.34) geldt dan volgt dus dat

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{q',p'}. \tag{3.37}$$

Hiermee krijgen we dat

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial q'_i}{\partial t} + \{q'_i, H\}_{q',p'} \equiv N_i(q', p', t), \qquad \dot{p}'^i = \frac{\partial p'^i}{\partial t} + \{p'^i, H\}_{q',p'} \equiv M^i(q', p', t). \tag{3.38}$$

[1] De stelling kan eigenlijk iets algemener geformuleerd worden door de laatste vergelijking in (3.34) als $\{q'_i, p'^j\}_{q,p} = c\,\delta_i^j$, te schrijven met c een constante. Deze vergelijking kan echter via een canonische transformatie, een herschaling van de coördinaten en momenta met $\sqrt{c}$, terug in de vorm van (3.34) gebracht worden.

Opdat er een H' zou bestaan zodat het rechterlid van deze uitdrukking als in (3.2) zou geschreven kunnen worden, moeten de volgende integreerbaarheids voorwaarden voldaan zijn:

$$\frac{\partial N_i}{\partial p'^j} = \frac{\partial N_j}{\partial p'^i}, \qquad \frac{\partial M^i}{\partial q'_j} = \frac{\partial M^j}{\partial q'_i}, \qquad \frac{\partial N_i}{\partial q'_j} + \frac{\partial M^j}{\partial p'^i} = 0. \tag{3.39}$$

Gebruik makend van (3.34) krijgen we

$$\{q'_i, q'_j\}_{q,p} = \{p'^i, p'^j\}_{q,p} = 0, \qquad \{q'_i, p'^j\}_{q,p} = \delta_i^j. \tag{3.40}$$

Nemen we hiervan de tijdsafgeleide, dan volgt m.b.v. de stelling van Poisson en (3.34):

$$\begin{aligned} &\{N_i, q'_j\}_{q',p'} + \{q'_i, N_j\}_{q',p'} = 0, \qquad \{M^i, p'^j\}_{q',p'} + \{p'^i, M^j\}_{q',p'} = 0, \\ &\{N_i, p'^j\}_{q',p'} + \{q'_i, M^j\}_{q',p'} = 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

wat na uitwerking precies de integreerbaarheids voorwaarden opleveren.

Nu moeten we ook nog aantonen dat de voorwaarde nodig is. We stellen dus dat de transformatie canonisch is, m.a.w. voor elke H bestaat er een H', zodat (3.2) geldt. We weten reeds dat dit equivalent is met vgl. (3.7), (3.11), (3.13) en (3.15). Uit deze vergelijkingen volgt dan dat

$$\frac{\partial p'^j}{\partial q_i} = -\frac{\partial p^i}{\partial q'_j}, \qquad \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} = \frac{\partial p^i}{\partial p'^j}, \qquad \frac{\partial p'^j}{\partial p^i} = \frac{\partial q_i}{\partial q'_j}, \qquad \frac{\partial q'_j}{\partial p^i} = -\frac{\partial q_i}{\partial p'^j}. \tag{3.42}$$

Hiervan kunnen we dan gebruik maken om $\{q'_i, q'_j\}_{q,p}$, $\{p'^i, p'^j\}_{q,p}$ en $\{q'_i, p'^j\}_{q,p}$ expliciet te berekenen met (3.34) als resultaat.