# 1 Het principe van d'Alembert

Gegeven een systeem, bestaande uit $n$ deeltjes, elk met plaatscoördinaat $\vec{r}_i$ en massa $m_i$, $i \in \{1, \cdots, n\}$. Uit de tweede wet van Newton volgt onmiddellijk:

$$\dot{\vec{p}_i} = \vec{F}_i^t + \vec{f}_i, \tag{1.1}$$

met $\vec{F}_i^t$ de (expliciet gegeven) totale toegepaste kracht op het $i^{de}$ deeltje en $\vec{f}_i$ de kracht uitgeoefend op het $i^{de}$ deeltje ten gevolge van de verbindingen (verbindings- of reactiekracht).

Een virtuele verplaatsing $\delta\vec{r}_i$ is een ogenblikkelijke, d.w.z. constant in de tijd, verplaatsing van het deeltje consistent met zowel de krachten als de verbindingen.

Uit vgl. (1.1) volgt dat

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \vec{F}_i^t + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}_i} \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{1.2}$$

We *beperken* ons nu tot die systemen waarbij de *verbindingskrachten geen virtuele arbeid* leveren. Voor zulke systemen volgt uit vgl. (1.2):

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \vec{F}_i - \dot{\vec{p}_i} \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \tag{1.3}$$

waarbij we de bovenindex $t$ op $\vec{F}_i$ hebben laten vallen, gezien we vanaf nu enkel nog de toegepaste krachten zullen tegenkomen. De verbindingskrachten zullen geen expliciete rol meer spelen. Vgl. (1.3) staat bekend als het principe van d'Alembert.

In het volgend hoofdstukje zullen we vgl. (1.3) verder uitwerken.

# 2 De lagrangiaan en de Euler-Lagrange vergelijkingen

We stellen dat ons systeem kan beschreven worden door $m$, $m \leq 3n$, veralgemeende plaatscoördinaten $q_j$, $j \in \{1, \cdots, m\}$ en we kennen de originele plaatscoördinaten als functie van de veralgemeende plaatscoördinaten $q_j$: $\vec{r}_i(q_1, \cdots, q_m, t)$ met $i \in \{1, \cdots, n\}$[1].

[1] Vanaf nu zullen we kortweg $\vec{r}_i(q, t)$ schrijven i.p.v. $\vec{r}_i(q_1, \cdots, q_m, t)$, analoog zullen we later ook $\vec{v}_i(q, \dot{q}, t)$ schrijven i. p. v. $\vec{v}_i(q_1, \cdots, q_m, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_m, t)$, enz.

Beschouwen we eerst $\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta\vec{r}_i$. $\delta\vec{r}_i$ kan nog herschreven worden als:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{2.1}$$

Merk op dat we geen term evenredig met $\delta t$ hebben, dit omdat een virtuele verplaatsing constant in de tijd is. Met dit kijgen we

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(F_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j, \end{aligned}\tag{2.2}$$

waar we de veralgemeende krachtcomponenten $Q_j$ invoerden:

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{2.3}$$

Vervolgens concentreren we ons op $\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i$. M.b.v vgl. (2.1) krijgen we:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \dot{\vec{p}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_i\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \left(m_i\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right)\delta q_j, \end{aligned}\tag{2.4}$$

waar we opnieuw gebruik maakten van het feit dat virtuele verplaatsingen tijdsonafhankelijk zijn.

We leiden nu twee feitjes af, die ons zullen toelaten om vgl. (2.4) verder te vereenvoudigen. Beschouw eerst $\vec{r}_i(q,t)$:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Dus hebben we dat voor $\vec{v}_i(q,\dot{q},t)$:

$$\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{2.6}$$

Verder hebben we ook nog dat

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}. \tag{2.7}$$

Vullen we nu vgl. (2.6) en (2.7) in in vgl. (2.4):

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}_i} \cdot \delta \vec{r}_i \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left( \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j. \tag{2.8}$$

Gebruik makend van de definitie van de kinetische energie:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i, \tag{2.9}$$

kunnen we vgl. (2.8) nog schrijven als:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}_i} \cdot \delta \vec{r}_i \;=\; \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \tag{2.10}$$

Combinatie van vgl. (1.3), (2.2) en (2.10) geeft:

$$\sum_{j=1}^{m} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j. \tag{2.11}$$

Stellen we nu verder nog dat de verbindingen holonoom waren en dat de veralgemeende coördinaten $q_i$ de verbindingen vrijmaken. Daaruit volgt dus dat de veralgemeende coördinaten onafhankelijk van elkaar zijn en in het bijzonder dat de virtuele verplaatsingen $\delta q_j$ onderling onafhankelijk zijn. In dit geval volgt uit vgl. (2.11) dat

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad \forall j \in \{1, \cdots, m\}. \tag{2.12}$$

Dit zijn de Euler-Lagrange vergelijkingen. Ze gelden voor elk systeem dat zo is dat de verbindingskrachten geen virtuele arbeid leveren en waarbij de verbindingen holonoom zijn en vrijgemaakt door veralgemeende coördinaten $q_i$, $i \in \{1, \cdots, m\}$. We kunnen deze vergelijkingen nog verder vereenvoudigen in het geval dat de krachten uit een potentiaal $V(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n, t)$ volgen:

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Combinatie van vgl. (2.13) met vgl. (2.12) resulteert in:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \tag{2.14}$$

met $L$ de *lagrangiaan*:

$$L \equiv T - V. \tag{2.15}$$

Merk op dat we expliciet gebruik maakten van het feit de potentiaal niet van de snelheid afhangt.

Uiteindelijk kunnen we nog iets verder gaan. Indien we een potentiaal $V(q, \dot{q}, t)$ hebben dat wel van de veralgemeende snelheden afhangt en indien de veralgemeende kracht componenten als volgt uit de potentiaal verkregen worden:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}, \tag{2.16}$$

dan volgt vgl. (2.14) nog steeds uit vgl. (2.12) met de Lagrangiaan in vgl. (2.15) gegeven. Vgl. (2.16) is minder uitzonderlijk dan men wel zou kunnen vermoeden. Een belangrijk voorbeeld is een geladen deeltje dat in een uitwendig elektro-magnetisch veld beweegt. We zullen zien dat zo een systeem een snelheidsafhankelijke potentiaal heeft en de krachten zullen precies via de betrekking (2.16) uit de potentiaal verkregen worden.

# 3 Het integraal principe van Hamilton

In het vorig hoofdstukje hebben we de Euler-Lagrange vergelijkingen afgeleid vanuit het d' Alembert principe dat een virtuele beweging van het mechanisch systeem beschouwde waarvoor de virtuele arbeid van de verbindingskrachten nul was. De Euler-Lagrange vergelijkingen werden dus bekomen door de ogenblikkelijke toestand van het systeem, dus de toestand op een welbepaald tijdstip, en infinitesimale virtuele verplaatsingen om deze ogenblikkelijke toestand te beschouwen. Het d' Alembert principe wordt dan ook een *differentiaalprincipe* genoemd.

De Euler-Lagrange vergelijkingen kunnen ook afgeleid worden uit een principe dat de volledige beweging van het systeem tussen een begintijdstip $t_1$ en een eindtijdstip $t_2$ beschouwt. Dit noemt men dan ook een *integraalprincipe*.

We voeren het begrip *configuratieruimte* in. Dit is een $m$-dimensionale ruimte met als coördinaten $q_i$, $i \in \{1, \cdots, m\}$. De beweging van ons mechanisch syteem wordt nu volledig gekarakteriseerd door een welbepaalde kromme $(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_m(t))$ in de configuratieruimte. Die kromme zagen we, werd volledig bepaald door de Euler-Lagrange vergelijkingen, tesamen met $2m$ randvoorwaarden.

Beschouw een systeem met gegeven Lagrangiaan $L(q, \dot{q}, t)$ met beginconfiguratie $q_i(t_1)$ en eindconfiguratie $q_i(t_2)$, $i \in \{1, \cdots, m\}$. We introduceren de *actie* $\mathcal{S}$ via:

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t). \tag{3.1}$$

Het *Hamilton principe* zegt:

*De werkelijke beweging van een mechanisch systeem is zo dat de actie $\mathcal{S}$ een extremum bereikt.*

We zullen hier enkel bewijzen dat het Hamilton principe een voldoende voorwaarde is, m.a.w. we zullen aantonen dat de Euler-Lagrange vergelijkingen uit het Hamilton principe volgen. Uitgaande van de Euler-Lagrange vergelijkingen kan men aantonen dat het Hamilton principe ook nodig is. Dit valt echter buiten deze cursus.

We kunnen banen $q_i(t, \varepsilon)$ die weinig van de werkelijke baan verschilen parametriseren door

$$q_i(t, \varepsilon) = q_i(t) + \varepsilon f_i(t), \tag{3.2}$$

met $q_i(t)$ de werkelijke baan en $f_i(t_1) = f_i(t_2) = 0$ maar verder is $f_i(t)$ willekeurig. Dus $q_i(t, \varepsilon)$ beschrijft kleine variaties omheen de werkelijke baan van het systeem, waarbij de begin- en eindpunten van de baan vastgehouden worden. De actie $\mathcal{S}$ bereikt een extremum voor $\varepsilon = 0$ indien

$$\left.\frac{d\mathcal{S}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0. \tag{3.3}$$

We krijgen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{S}(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t,\varepsilon), \dot{q}(t,\varepsilon), t) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{f}_i \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i + \left.\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i \right|_{t=t_1}^{t=t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

waar we in de laatste stap $f_i(t_1) = f_i(t_2) = 0$ gebruikten. We krijgen hiermee:

$$\left.\frac{d\mathcal{S}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i. \tag{3.5}$$

Gezien het feit dat $f_i$ willekeurig is vinden we dat aan vgl. (3.3) voldaan is indien de Euler-Lagrange vergelijkingen gelden[2]:

$$\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{3.6}$$

We kunnen we ook direct de variatie van de lagrangiaan berekenen:

$$\begin{aligned} \delta L(q, \dot{q}, t) &= L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Zo krijgen we voor de variatie van de actie $\delta\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L(q, \dot{q}, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i, \end{aligned} \tag{3.8}$$

waar we bij de laatste stap rekening hielden met het feit dat begin en eindpunt van de baan bij de variatie worden vast gehouden. Dus de regels van de variatierekening zijn formeel dezelfde als die van de differentiaalrekening, waarbij we echter de tijd constant houden. We kunnen het Hamilton integraal principe nu ook herschrijven als

$$\delta\mathcal{S} = 0. \tag{3.9}$$

Gezien de variaties in vgl. (3.8) willekeurig waren, volgen de Euler-Lagrange vergelijkingen onmiddellijk.

[2] We maken hier gebruik van het fundamenteel lemma van de variatierekening dat zegt dat indien $\int_{t_1}^{t_2} dx\, f(x)g(x) = 0$ voor alle functies $g(x)$ die continu zijn t.e.m. de tweede afgeleide, dan is noodzakelijkerwijs $f(x) = 0$ voor $x \in [x_1, x_2]$. Zie b.v. R. Courant en H. Hilbert in de *Methods of Mathematical Physics*, volume 1, hoofdstuk 4.