De Dirac vergelijking

Alexander Sevrin

1 Inleiding

Deze nota's geven een korte inleiding tot de Dirac vergelijking en haar eigenschappen. Kennis van de Dirac vergelijking is onontbeerlijk bij de studie van elementaire deeltjesfysica en quantum veldentheorie. Verder speelt de Dirac vergelijking een belangrijke rol bij de studie van fijnstructuren in de atoomfysica.

2 De Dirac vergelijking

In de quantummechanica worden de coordinaten en momenta van de klassieke mechanica gezien als lineaire hermitische operatoren op een Hilbert ruimte. Zo hebben we dat

$$\begin{aligned} \vec{p} &\rightarrow -i\hbar\nabla \\ E &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

en de Schroedinger vergelijking voor een vrij deelje met massa m is:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} &= H\,\psi(\vec{x},t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x},t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Hoewel deze vergelijking manifest invariant is onder rotaties is het evident dat ze niet covariant transformeert onder een Lorentz transformatie, vgl. (A.6). Dit is onmiddellijk duidelijk indien men zich realiseert dat de tijdsafgeleide lineair voorkomt terwijl de ruimtelijke afgeleiden kwadratisch voorkomen.

We zullen nu een vergelijking opstellen van de vorm

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = H\,\psi(\vec{x},t), \tag{2.3}$$

die wel covariant transformeert onder Lorentz transformaties. Opdat dit het geval zou zijn mag H hoogstens termen lineair in de ruimtelijke afgeleiden bevatten. We komen zo tot de meest algemene vorm voor H (waar we veronderstelden dat H niet afhankelijk is van tijdsafgeleiden):

$$H\,\psi(\vec{x},t) = -i\hbar c\sum_{j=1}^{3}\alpha^j\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial x^j} + mc^2\beta\psi(\vec{x},t). \tag{2.4}$$

Indien α^i en β gewone constantes zouden zijn, dan zou vgl. (2.3) niet eens invariant zijn onder rotaties. Dus gaan we een stap verder en beschouwen we de golffunctie $\psi(\vec{x},t)$ als een $N\times 1$ matrix en α^i en β als $N\times N$ constante, dimensieloze, hermitische matrices. We wensen nu dat deze vergelijking consistent is met Einsteins energie-momentum relatie $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4$ die in operator gedaante

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi(\vec{x},t)}{\partial t^2} = -c^2\hbar^2\Delta\psi(\vec{x},t) + m^2c^4\psi(\vec{x},t), \tag{2.5}$$

wordt. Werken we dit uit m. b. v. vgl. (2.3) en (2.4) dan volgt dat α^i en β aan de volgende eisen moeten voldoen:

$$\begin{aligned}\{\alpha^i,\alpha^j\} &\equiv \alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta_{ij}\mathbf{1},\\ \{\alpha^i,\beta\} &\equiv \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0,\\ \beta^2 &= \mathbf{1},\end{aligned} \tag{2.6}$$

$\forall i,\, j \in \{1,2,3\}$.

Oefening: Toon dit aan.

Uit deze vergelijkingen volgt dat zowel α^i als β spoorloos zijn. B.v.:

$$tr\,\alpha^i = tr\beta^2\alpha^i = tr\beta\alpha^i\beta = -tr\beta^2\alpha^i = -tr\alpha^i. \tag{2.7}$$

We gebruikten in de eerste stap de laatste van de vergelijkingen (2.6), in de tweede gebruikten we de cycliciteit van het spoor, vervolgens de tweede van de vergelijkingen (2.6) en uiteindelijk nog eens de laatste vergelijking in (2.6). Analoog kan zo ook aangetoond worden dat β spoorloos is. Uit $\beta^2 = \alpha^{i\,2} = \mathbf{1}$, volgt dat de eigenwaarden van zowel α_i als β gelijk aan ± 1 zijn. Gezien deze matrices ook spoorloos zijn, moeten ze dus even-dimensionaal zijn.

Nu rijst de vraag welke de minimale waarde van N is opdat aan al deze voorwaarden voldaan kan zijn. Nemen we even $N=2$. Een volledige basis voor de 2×2 hermitische matrices is bv. gegeven door de Pauli σ-matrices,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

en de 2×2 eenheidsmatrix. De α^i matrices zouden nog eventueel kunnen gerepresenteerd worden door de Pauli matrices, maar er is geen plaats voor de β matrix.

Nemen we dan $N = 4$. Hier vindt men wel oplossingen. Een voorbeeld is:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Vanaf nu nemen we $N = 4$. Beschouwen we de Dirac vergelijking, vgl. (2.3,2.4) in de statische limiet:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = mc^2 \beta \psi, \tag{2.10}$$

dan vinden we, m.b.v. de representatie vgl. (2.9), dat er vier oplossingen zijn:

$$\psi^1 = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi^2 = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

en

$$\psi^3 = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi^4 = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

De eerste twee zijn herkenbaar als positieve energie oplossingen, terwijl de laatste twee negatieve energie hebben. Later zullen we zien dat de twee positieve energie oplossingen de twee componenten van een spin 1/2 fermion (bv. een elektron) beschrijven, terwijl de twee negatieve energie oplossingen het corresponderend anti-deeltje (b.v. een positron) beschrijven.

Er rest ons nu twee belangrijke dingen te verifiëren:

1. We moeten bewijzen dat de Dirac vergelijking covariant transformeert onder Lorentz transformaties.

2. We moeten aantonen dat de Dirac vergelijking zich in de niet-relativistische limiet herleidt tot iets dat we reeds kennen uit de quantummechanica.

In het volgend hoofdstukje zullen we punt 1 nader bekijken.

3 Relativistische eigenschappen

We herschrijven eerst de Dirac vergelijking een beetje. We noemen

$$\gamma^0 \equiv \beta, \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha^i, \tag{3.1}$$

en vatten dit samen met de notatie γ^μ met $\mu \in \{0, \cdots, 3\}$. We definiëren γ_μ door $\gamma_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$. We hebben dus dat vgl. (2.4) zich vertolkt als:

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2\eta_{\mu\nu}, \\ (\gamma^\mu)^\dagger &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

dus γ^0 is hermitisch terwijl γ^i, $i \in \{1, 2, 3\}$, anti-hermitisch zijn. Met deze gamma-matrices kunnen we Dirac vergelijking nog herschrijven als:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi(\bar{x}) - mc\psi(\bar{x}) = 0, \tag{3.3}$$

of ook nog

$$i\hbar\not{\partial}\psi(\bar{x}) - mc\psi(\bar{x}) = 0, \tag{3.4}$$

waar we de notatie $\not{A}$ invoerden: $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$. Hoewel vgl. (3.4) er nu wel covariant uitziet moeten we dit wel nog aantonen. We stellen dat $\psi(\bar{x})$ onder een Lorentztransformatie, vgl. (A.6), lineair transformeert:

$$\psi(\bar{x}) \to \psi'(\bar{x}') = S(\Lambda)\psi(\bar{x}), \tag{3.5}$$

met $S(\Lambda)$ een 4×4 matrix. Gebruik makend van vgl. (A.6) en (3.5), vinden we dat de Dirac vergelijking (3.4) covariant transformeert indien

$$\gamma^\mu {\Lambda_\mu}^\nu S(\Lambda) = S(\Lambda)\gamma^\nu, \tag{3.6}$$

geldt.

<u>*Oefening:*</u> Toon dit aan.

Deze vergelijking moet nu nog opgelost worden. Hiertoe bekijken we een infinitesimale Lorentz transformatie:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu. \tag{3.7}$$

Uit vgl. (A.10) volgt dat $\varepsilon^\mu{}_\nu$ aan

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}, \tag{3.8}$$

voldoet. Voor een infinitesimale transformatie hebben we dan ook

$$S(\Lambda) = \mathbf{1} + s(\varepsilon). \tag{3.9}$$

Vgl. (3.6) wordt voor een infinitesimale Lorentz transformatie:

$$[\gamma^\mu, s(\varepsilon)] = \varepsilon^\mu{}_\nu \gamma^\nu. \tag{3.10}$$

Een oplossing hiervoor is

$$S(\Lambda) = \mathbf{1} + s(\varepsilon) = \mathbf{1} - \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

met

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \tag{3.12}$$

Oefening: Verifieer dat vgl. (3.11), vgl. (3.10) oplost. Bewijs hiervoor eerst dat

$$[\gamma^\rho, [\gamma^\mu, \gamma^\nu]] = 4\eta^{\rho\mu}\gamma^\nu - 4\eta^{\rho\nu}\gamma^\mu. \tag{3.13}$$

Nu we de infinitesimale Lorentz transformatie hebben, moeten we nog eindige Lorentz transformaties bekomen. Het is duidelijk dat $\Lambda^\mu{}_\nu$,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (e^\varepsilon)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu + \frac{1}{2!}\varepsilon^\mu{}_\rho \varepsilon^\rho{}_\nu + \cdots \tag{3.14}$$

aan vgl. (A.10) voldoet indien $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ geldt. In het bijzonder bekomen we hieruit de infinitesimale Lorentz transformaties indien $\varepsilon_{\mu\nu}$ infinitesimaal is. Voor zulke Λ hebeen we dat $S(\Lambda)$ gegeven is door

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}. \tag{3.15}$$

Om dit aan te tonen kan men bv. gebruik maken van de volgende eigenschap van matrices:

$$e^A\, B\, e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots \tag{3.16}$$

Dit geeft dus een volledige beschrijving van hoe spinoren onder eigenlijke Lorentz transformaties transformeren. De transformatie eigenschappen van spinoren onder Lorentz transformaties die niet continu met de eenheidstransformatie verbonden zijn, zal besproken worden wanneer we het Dirac veld bestuderen.

Uiteindelijk kunnen we ook uit het feit dat $\sigma_{\mu\nu}^\dagger = \gamma^0 \sigma_{\mu\nu} \gamma^0$ afleiden dat

$$S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0. \tag{3.17}$$

Hiermee kunnen we dan aantonen dat de toegevoegde spinor $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$ onder Lorentz transformaties als

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S(\Lambda)^{-1}. \tag{3.18}$$

<u>*Oefening:*</u> Toon aan dat uit de definitie van γ^5 (B.2) en (3.6) volgt dat

$$S(\Lambda)\, \gamma^5\, S(\Lambda)^{-1} = \det(\Lambda)\, \gamma^5 \tag{3.19}$$

<u>*Oefening:*</u> Zij $\psi(x)$ en $\chi(x)$, twee spinoren, toon dan aan m.b.v. (3.5), (3.18) en (3.19) dat

1. $\bar{\psi}(x)\chi(x)$ een scalair is,
2. $\bar{\psi}(x)\gamma^5\chi(x)$ een pseudo-scalair is,
3. $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\chi(x)$ een vector is,
4. $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\chi(x)$ een pseudo-vector is.

4 Oplossingen van de Dirac vergelijking

De Dirac vergelijking heeft vlakke-golf oplossingen:

$$\begin{aligned} \psi(\bar{x}) &\propto u_r(\vec{p}) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}}, \quad r \in \{1,2\}, \\ \psi(\bar{x}) &\propto v_r(\vec{p}) e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}}, \quad r \in \{1,2\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

met $\bar{p} = \hbar\bar{k}$ en

$$p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}, \tag{4.2}$$

en

$$(\not{p} - mc) u_r(\vec{p}) = 0, \qquad (\not{p} + mc) v_r(\vec{p}) = 0. \tag{4.3}$$

Het eerste stel oplossingen beschrijft een deeltje met positieve energie cp^0 en lineair moment $\vec{p}$, het tweede stel oplossingen schijnt een deeltje met negatieve energie $-cp^0$ en lineair moment $-\vec{p}$ te beschrijven. Terwijl we de eerste stel oplossingen als een electron met energie cp^0 en lineair moment $\vec{p}$ zullen interpreteren, interpreteren we de tweede stel oplossingen als het afwezig zijn van een electron met energie cp^0 en lineair moment $\vec{p}$, oftewel een positron met energie cp^0 en lineair moment $\vec{p}$.

We voeren nu de energie projectie operatoren, $\Pi^{\pm}(\vec{p})$, in:

$$\Pi^{\pm}(\vec{p}) \equiv \frac{\pm \not{p} + mc}{2mc}. \tag{4.4}$$

<u>*Oefening:*</u> Toon aan dat $\Pi^{\pm}(\vec{p})$ projectieoperatoren zijn.

We krijgen onmiddellijk dat

$$\begin{aligned} &\Pi^{+}(\vec{p})u_r(\vec{p}) = u_r(\vec{p}), \qquad \Pi^{-}(\vec{p})v_r(\vec{p}) = v_r(\vec{p}), \\ &\Pi^{-}(\vec{p})u_r(\vec{p}) = \Pi^{+}(\vec{p})v_r(\vec{p}) = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Om nu de oplossingen verder te karakteriseren, m.a.w. een fysische betekenis aan de subindex r in $u_r(\vec{p})$ en $v_r(\vec{p})$, hebben we een tweede stel projectie operatoren nodig die commuteren met het de energieprojectoren, zodat we beiden simultaan kunnen diagonaliseren.

Wij zullen voor dit tweede stel altijd gebruik maken van de heliciteits projectoren $P_{\pm}(\vec{p})$:

$$P_{\pm}(\vec{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \vec{\sigma}_{\vec{p}}), \tag{4.6}$$

met

$$\vec{\sigma}_{\vec{p}} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}, \tag{4.7}$$

en

$$\vec{\sigma} \equiv (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}). \tag{4.8}$$

<u>*Oefening:*</u> Toon aan dat

1. $\sigma^i = -\gamma^0\gamma^5\gamma^i$.

2. $P_{\pm}(\vec{p})$ projectie operatoren zijn.

3. de energie en de heliciteits projectie operatoren onderling commuteren.

We diagonaliseren nu beide stellen oplossingen door in (4.1)

$$\begin{aligned} P_+(\vec{p})u_r(\vec{p}) &= \delta_{1r}u_r(\vec{p}), \qquad P_+(\vec{p})v_r(\vec{p}) = \delta_{2r}v_r(\vec{p}), \\ P_-(\vec{p})u_r(\vec{p}) &= \delta_{2r}u_r(\vec{p}), \qquad P_-(\vec{p})v_r(\vec{p}) = \delta_{1r}v_r(\vec{p}), \end{aligned} \tag{4.9}$$

te stellen. We krijgen dus dat $u_1(\vec{p})$ een electron beschrijft met spin parallel aan de bewegingsrichting, positieve heliciteit dus, en $u_2(\vec{p})$ beschrijft een electron met spin anti-parallel aan de bewegingsrichting, negatieve heliciteit dus. We hebben dan dat $v_1(\vec{p})$ een negatieve energie electron beschrijft met moment $-\vec{p}$ en spin parallel aan het moment, dus positieve heliciteit. Anders gezegd: een positron met positieve energie , moment $\vec{p}$ en positieve heliciteit.

Rest ons nu nog de relatie tussen $\vec{\sigma}$ en spin uit te leggen. De constantes van de beweging die geassocieerd zijn met de Lorentz invariantie zijn:

$$M_{\mu\nu} = i\hbar(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{\hbar}{2}\sigma_{\mu\nu}, \tag{4.10}$$

waarvan men kan verifiëren dat die met de Hamiltoniaan vgl. (2.4) commuteren en die aan

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i\hbar(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\rho\mu} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\rho\nu}). \tag{4.11}$$

Het angulair moment is dan

$$\vec{L} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}), \tag{4.12}$$

en is expliciet

$$\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \nabla + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}. \tag{4.13}$$

We herkennen dus een orbitaal stuk, $-i\hbar\vec{r} \times \nabla$ en een intrinsiek of spin gedeelte $(\hbar/2)\vec{\sigma}$.

Oefening: We introduceren de chiraliteits projectie operatoren P_R en P_L:

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5), \qquad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5). \tag{4.14}$$

1. Toon aan dat P_L en P_R projectie operatoren zijn.

2. Toon aan dat

$$\begin{aligned}\gamma^5 u_r(\vec{p}) &= \vec{\sigma}_{\vec{p}} u_r(\vec{p}) + \mathcal{O}(mc/|\vec{p}|),\\ \gamma^5 v_r(\vec{p}) &= \vec{\sigma}_{\vec{p}} v_r(\vec{p}) + \mathcal{O}(mc/|\vec{p}|).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dus de begrippen heliciteit en chiraliteit vallen samen voor massaloze fermionen.

We moeten tenslotte nog $u_r(\vec{p})$ en $v_r(\vec{p})$ normaliseren. We kiezen:

$$u_r^\dagger(\vec{p})u_r(\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p}) = \frac{E_{\vec{p}}}{mc^2}. \tag{4.16}$$

Oefening: Toon aan dat (4.16) impliceert dat

$$\begin{aligned}&u_r^\dagger(\vec{p})u_s(\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \frac{E_{\vec{p}}}{mc^2}\delta_{rs},\\ &u_r^\dagger(\vec{p})v_s(-\vec{p}) = 0,\\ &\bar{u}_r(\vec{p})u_s(\vec{p}) = -\bar{v}_r(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \delta_{rs},\\ &\bar{u}_r(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \bar{v}_r(\vec{p})u_s(\vec{p}) = 0,\\ &\sum_{r=1}^{2}\left(u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) - v_r(\vec{p})\bar{v}_r(\vec{p})\right) = \mathbf{1}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

A Conventies

Een 4-vector wordt als $\bar{v}$ genoteerd. Een 3-vector schrijven we als $\vec{v}$. De componenten van een contravariante 4-vector $\bar{v}$ worden als v^μ, $\mu \in \{0, \cdots, 3\}$ genoteerd. Een 3-vector $\vec{v}$, heeft componenten v^i, $i \in \{1, 2, 3\}$. We kunnen dus schrijven $\bar{v} \equiv (v^0, \vec{v})$. Voorbeelden van 4-vectoren zijn de plaatsvector $\bar{x} \equiv (ct, \vec{x})$ en de momentum 4-vector $\bar{p} \equiv (E/c, \vec{p})$.

De componenten van een covariante 4-vector worden als v_μ, $\mu \in \{0, \cdots, 3\}$ geschreven. Een voorbeeld van een covariante 4-vector is ∂_μ:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{A.1}$$

De metriek $\eta_{\mu\nu}$ is nul indien $\mu \neq \nu$ en anders $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -\eta_{00} = -1$. De metriek $\eta_{\mu\nu}$ interpoleert tussen contravariante en covariante vectoren [1]

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu, \qquad v^\mu = \eta^{\mu\nu} v_\nu, \tag{A.2}$$

[1] We gebruiken de Einstein sommatie conventie: er wordt gesommeerd over herhaalde Griekse indices. B.v. $v_\mu w^\mu$ staat voor $\sum_{\mu=0}^{3} v_\mu w^\mu$.

waar we de inverse metriek $\eta^{\mu\nu}$ invoerden:

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta^{\rho}_{\mu}. \tag{A.3}$$

De metriek laat ons toe het scalair product van twee 4-vectoren te definiëren:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} \equiv v^{\mu}\eta_{\mu\nu}w^{\nu}. \tag{A.4}$$

Gebruik makend van het voorgaande volgt dan ook dat

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = v_{\mu}\eta^{\mu\nu}w_{\nu} = v^{\mu}w_{\mu} = v_{\mu}w^{\mu} = v^0 w^0 - \vec{v} \cdot \vec{w}. \tag{A.5}$$

We hebben bv. dat Einstein's energie-momentum relatie $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ kan herschreven worden als $\bar{p} \cdot \bar{p} = \bar{p}^2 = m^2c^2$.

Een Lorentz transformatie is een lineaire transformatie van de coordinaten die het scalair product van twee 4-vectoren invariant laat. Onder een Lorentz transformatie

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}, \tag{A.6}$$

is een scalair $f(\bar{x})$ invariant:

$$f(\bar{x}) \to f'(\bar{x}') = f(\bar{x}). \tag{A.7}$$

Een 4-vector $\bar{v}(\bar{x})$ transformeert als de gradiënt van een scalair:

$$\begin{aligned} v^{\mu}(\bar{x}) &\to v'(\bar{x}')^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}v^{\nu}(x) \\ v_{\mu}(\bar{x}) &\to v'(\bar{x}')_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}v_{\nu}(x) \\ &. \end{aligned} \tag{A.8}$$

We krijgen dat het scalair product van twee vectoren $\bar{v}$ en $\bar{w}$ Lorentz invariant is

$$\bar{v}'(\bar{x}') \cdot \bar{w}'(\bar{x}') = \bar{v}(\bar{x}) \cdot \bar{w}(\bar{x}), \tag{A.9}$$

indien $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ aan

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\eta_{\mu\nu} = \Lambda_{\rho}{}^{\mu}\Lambda_{\sigma}{}^{\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}, \tag{A.10}$$

voldoet. Uit vgl. (A.10) volgt dat

$$(\det \Lambda)^2 = \pm 1. \tag{A.11}$$

Oefening: Toon aan dat uit vgl. (A.9), vgl. (A.10) volgt en uit vgl. (A.10), vgl. (A.11) volgt.

Lorentz transformaties waarvoor $\det \Lambda = 1$ geldt worden eigenlijke Lorentz transformaties genoemd terwijl we van oneigenlijke Lorentz transformaties spreken indien $\det \Lambda = -1$ geldt. Voorbeelden van eigenlijke Lorentz transformaties zijn gewone eigenlijke rotaties:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

met R een orthogonale 3×3 matrix, $R\,R^T = \mathbf{1}$, met determinant 1. Ook de Lorentz boosts zijn voorbeelden van eigenlijke Lorentz transformaties. Een boost in de x^1-richting wordt:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

met

$$\begin{aligned} \cosh\eta &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \sinh\eta &= \frac{v}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} . \end{aligned} \tag{A.14}$$

Voorbeelden van oneigenlijke transformaties zijn de pariteitstransformatie

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.15}$$

en de tijdsomkeertransformatie

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

het is duidelijk dat elke oneigenlijke Lorentz transformatie gevolgd door een eigenlijke Lorentz transformatie opnieuw oneigenlijk is.

Uiteindelijk hebben we nog enkele definities:

1. Een *scalair* $f(\bar{x})$ transformeert onder een Lorentz transformatie als:

$$f(\bar{x}) \to f'(\bar{x}') = f(\bar{x}). \tag{A.17}$$

2. Een *pseudo-scalair* $g(\bar{x})$ transformeert onder een Lorentz transformatie als:

$$g(\bar{x}) \to g'(\bar{x}') = \det\Lambda\, g(\bar{x}). \tag{A.18}$$

3. Een *vector* $v^\mu(\bar{x})$ transformeert onder een Lorentz transformatie als:

$$v^\mu(\bar{x}) \to v'^\mu(\bar{x}') = \Lambda^\mu{}_\nu\, v^\nu(\bar{x}). \tag{A.19}$$

4. Een *pseudo- of axiale vector* $a^\mu(\bar{x})$ transformeert onder een Lorentz transformatie als:

$$a^\mu(\bar{x}) \to a'^\mu(\bar{x}') = \det\Lambda\, \Lambda^\mu{}_\nu\, a^\nu(\bar{x}). \tag{A.20}$$

5. Een *spinor* $\psi(\bar{x})$ transformeert onder een Lorentz transformatie als:

$$\psi(\bar{x}) \to \psi'(\bar{x}') \to S(\Lambda)\psi(\bar{x}), \tag{A.21}$$

   met $S(\Lambda)$ in vgl. (3.6) gedefinieerd.

6. De toegevoegde spinor $\bar{\psi}(\bar{x}) \equiv \psi^\dagger(\bar{x})\gamma^0$ transformeert onder een Lorentz transformatie als:

$$\bar{\psi}(\bar{x}) \to \bar{\psi}'(\bar{x}') = \bar{\psi}(\bar{x})S(\Lambda)^{-1}. \tag{A.22}$$

B Gammatrica

Uitgaande van de definiërende eigenschappen van de γ-matrices:

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2\eta_{\mu\nu} \\ (\gamma^\mu)^\dagger &= \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \end{aligned} \tag{B.1}$$

kan men heel wat nuttige eigenschappen afleiden. We voeren naast deze matrices ook nog $\gamma^5 \equiv \gamma_5$ in:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma. \tag{B.2}$$

We maakten hier gebruik van het ε-symbool dat gedefinieerd is door $\varepsilon^{0123} = 1$ en het verandert van teken bij elke oneven permutatie van de indices, terwijl het het teken behoudt bij elke even permutatie van de indices. In het bijzonder volgt hieruit dat het ε-symbool nul is indien twee of meerdere indices gelijk aan elkaar zijn. Het is niet moeilijk om uit de definitie van de γ^5 matrix en vgl. (B.1) af te leiden dat

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \qquad (\gamma^5)^2 = \mathbf{1}, \qquad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \forall \mu \in \{0, \cdots, 3\}. \tag{B.3}$$

Hieruit krijgen we nu bv. dat het spoor van een oneven aantal γ-matrices nul is:

$$\begin{aligned} tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}) &= tr((\gamma^5)^2\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}) \\ &= tr(\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma^5) \\ &= (-1)^{2n+1} tr(\gamma^5\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}) \\ &= -tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}}), \end{aligned} \tag{B.4}$$

waar we in de tweede stap van de cycliciteit van het spoor gebruik maakten om vervolgens $2n+1$ malen het feit dat γ^5 anticommuteert met γ^μ te gebruiken.

<u>*Oefening:*</u> Toon aan m.b.v. (B.1), (B.2) en (B.3) dat

1. $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$.
2. $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})$.
3. $tr(\gamma^5) = tr(\gamma^5\gamma^\mu) = tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 0$.
4. $tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

<u>*Oefening:*</u> Toon aan, gebruik makend van de definiërende eigenschappen van de γ-matrices, dat

1. $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$.
2. $\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = -2\gamma_\nu$.
3. $\gamma^\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\mu = 4\eta_{\rho\sigma}$.
4. $\gamma^\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\mu = -2\gamma^\tau\gamma^\sigma\gamma^\rho$.

5. $\gamma^\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu = 2(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau + \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu)$.

We eindigen deze appendix met de stelling van Pauli: *Indien zowel γ^μ en γ'^μ twee stellen γ-matrices zijn, die beiden aan de definiërende eigenschappen (B.1) voldoen, dan bestaat er een unitaire matrix U zodat $\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$.*
Het is duidelijk dat de voorwaarde voldoende is: indien γ^μ aan (B.1) voldoet en $\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$ met U een unitaire matrix, dan verifieert men zonder moeite dat γ'^μ ook aan (B.1) voldoet. Het bewijs dat de voorwaarde ook nodig is, is nogal technisch en slaan we dan ook over.

Interessante representaties zijn o.a.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.5}$$

of

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{B.6}$$